Differentialgeometrische Kennzeichnung einer Klasse von Algebren

Lübbert, Christoph

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977,
S.89-100

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Differentialgeometrische Kennzeichnung einer Klasse von Algebren

Von **Christoph Lübbert,** Darmstadt

Vorgelegt von Hans Robert Müller und Hans-Joachim Kowalsky

Es werden die sogenannten „metrischen" (endlichdimensionalen) Algebren über R differentialgeometrisch gekennzeichnet, indem jeder Algebra ein invarianter linearer Zusammenhang auf einer Lieschen abelschen Gruppe G zugeordnet wird: Der zugeordnete Zusammenhang ist von der Art, daß in jeder (eine bestimmte Richtung enthaltenden) G-Ebene η durch jeden Punkt eine Autoparallele geht, die ganz in η liegt.

1. Unter einer K-Algebra verstehen wir hier einen endlich-dimensionalen Vektorraum A über einem kommutativen Körper K (Charakteristik $\neq 2$) mit einem K-bilinearen Produkt $a,b \in A \rightarrow ab \in A$. Kommutativität oder Assoziativität wird zunächst nicht gefordert. Besitzt A eine Eins e, so ist Ke eine zu K isomorphe Teilalgebra; daher identifizieren wir meist e mit der Körper-Eins 1 und schreiben $A = K \oplus V$ mit geeignetem Teilvektorraum $V \subset A$.

Eine K-Algebra A mit Eins $e = 1$ heiße *metrisch,* wenn A einen involutorischen Antiautomorphismus $\varphi \neq id_A : x \rightarrow \bar{x}$ ($\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$, $\bar{\bar{x}} = x$) gestattet mit $\mathrm{Fix}\varphi = K$.

Die Bezeichnung „metrisch" erscheint aus folgendem Grunde gerechtfertigt: Zu φ gehört wegen $x = \bar{x} \Leftrightarrow x \in K$ eine *symmetrische K-Bilinearform* („Metrik")

$$\langle x,y \rangle := \tfrac{1}{2}(x\,\bar{y} + y\,\bar{x}) \in K \quad (x,y \in A) \tag{1.1}$$

Wegen $\langle \alpha,\beta \rangle = \alpha\beta$ für $\alpha,\beta \in K$ ist (1.1) nicht die Nullform. Wegen $\langle 1,1 \rangle = 1 \neq 0$ gestattet A die kanonische Zerlegung

$$A = K \oplus V \;\text{ mit } V := \{x \in A / \langle 1,x \rangle = 0\} \tag{1.2}$$

(Zwei Vektoren $x,y \in A$ mit $\langle x,y \rangle = 0$ mögen orthogonal heißen.) Der *Ausartungsgrad* der Metrik $\langle , \rangle$ ist die Dimension des *Radikals*

$$\mathrm{Rad}A = \{r \in A / \langle r,x \rangle = 0 \;\; \forall x \in A\} \subset V \tag{1.3}$$

Der Teilraum RadA ist, wie man leicht sieht, ein (zweiseitiges) Ideal in A.

1.1 Assoziative metrische Algebren. Diese Algebren heißen nach KARZEL [6] auch *kinematische Algebren.* Sie dienen zur Beschreibung der sogen. *kinematischen Räume* (P,G): das sind projektive (desarguessche) Räume P über K, die von einer Gruppe G bis auf eine Hyperquadrik $S = P - G$ ausgefüllt werden derart, daß die $a \in G$ sowohl von rechts ($x \in P \rightarrow xa \in P$) als auch von links ($x \in P \rightarrow ax \in P$) auf P als reguläre Kollineationen wirken und daß der Durchschnitt $g \cap H$ jeder Gerade $g \subset P$ durch den Einspunkt $E \in G$ eine Untergruppe von G ist. Man kann zeigen (vgl. BRÖCKER [3] und LÜBBERT [9]), daß es zu jedem kinematischen Raum (P, G) eine assoziative metrische K-Algebra A gibt, so daß $P = A - \{0\}/K - \{0\}$ und $G = \mathbf{E}(A)/K - \{0\}$ ist, wobei $\mathbf{E}(A)$ die Einheitengruppe der Algebra A, bestehend aus den Elementen x mit $\langle x, x \rangle \neq 0$, ist. Bei der kanonischen Projektion $A - \{0\} \to P$ geht das Nullstellengebilde $\{x \in A / \langle x, x \rangle = 0\}$ in die Hyperquadrik S über. Die *Klassifikation* der kinematischen K-Algebren geschieht am übersichtlichsten über den Ausartungsgrad $\varrho = \dim \mathrm{Rad} A$ der Metrik $\langle , \rangle$ (LÜBBERT [9]): Wir setzen $\dim A = n + 1$, also $\dim V = \dim P = n$; $n > 1$.

Fall I: $\varrho \leqq n\text{-}2$: Daraus folgt notwendig $n = 3$, $\mathrm{Rad} A = \{0\}$. A ist entweder der Schiefkörper der Quaternionen über K oder A ist isomorph zur Algebra der zweireihigen Matrizen über K. Die zugehörigen kinematischen Räume sind dreidimensional. Im ersten Fall ist P der elliptische Raum mit $P = G$, $S = \emptyset$ (vgl. etwa BLASCHKE [1]), im zweiten Fall ist P der sogen. indefinit-elliptische Raum (Bezeichnung von STRUBECKER [10]), in dem S ein einschaliges Hyperboloid ist, das die Gruppe G in zwei Komponenten zerlegt.

Fall II: $\varrho = n\text{-}1$: Falls wir $K = \mathbb{R}$ annehmen, besteht S entweder aus einer „Hypergerade" (proj. Teilraum der Codimension 2 in P); im Fall $n = 3$ ist (P, G) der quasielliptische kinematische Raum von BLASCHKE/GRÜNWALD (vgl. [2]); oder S besteht aus zwei Hyperebenen. Im ersten Fall ist n ungerade, und zu jedem $n = 2m + 1$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine kinematische Algebra A. Im zweiten Fall ist n beliebig, und zu jedem n gibt es nichtisomorphe kinematische Algebren.

Fall III; $\varrho > n\text{-}1$: Da $\langle , \rangle$ nicht die Nullform ist, bleibt nur der Fall $\varrho = n$. S entartet hier zu einer Hyperebene in P, und zu jedem $n > 2$ gibt es nichtisomorphe kinematische Algebren.

Aus dieser Übersicht ersieht man, daß es „nur wenige" kinematische Algebren gibt, da die Metrik $\langle , \rangle$ nicht jeden beliebigen Ausartungsgrad annehmen kann. Dies wird anders bei kommutativen metrischen Algebren.

1.2 Kommutative metrische Algebren. Aus jeder kinematischen Algebra A (Produkt $x \cdot y$) erhält man über das neue Produkt $xy := \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x)$ eine kommutative (nicht assoziative) metrische Algebra A' mit der gleichen Metrik $\langle , \rangle$. A' ist eine *Jordanalgebra*[1]). Allgemeiner ist jede kommutative metrische Algebra eine Jordanalgebra und daher (Trivialfälle ausgeschlossen) *nicht-assoziativ.* Wir nennen diese Klasse daher auch die *metrischen Jordanalgebren.* Die Klasse der metrischen Jordanalgebren besteht nicht nur aus den Algebren A', die von kinematischen Algebren A wie oben abgeleitet sind.

Man kann nämlich jede metrische Jordanalgebra auf folgende Weise konstruieren (vgl. JACOBSON [5] S. 13): V sei ein K-Vektorraum (Char $K \neq 2$) mit einer beliebigen symmetrischen Bilinearform $\langle , \rangle^{\cdot}$. Betrachten wir die direkte Summe

$$A := K \ominus V$$

und erweitern die Form $\langle , \rangle^{\cdot}$ zu $\langle x, y \rangle := \xi\eta + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^{\cdot}$ auf ganz A ($x = \xi + \mathbf{x}$, $y = \eta + \mathbf{y}$,

---

[1]) B heißt Jordanalgebra, wenn B kommutativ ist und wenn $a^2(ba) = (a^2b)a$ gilt.

$\xi,\eta \in K$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$), so wird A zu einer metrischen Jordanalgebra durch die Produktdefinition

$$xy := (\xi\eta - \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle') + (\xi\mathbf{y} + \eta\mathbf{y}).$$

Für später benötigen wir den folgenden

Satz 1: Eine K-Algebra A (Char $K \neq 2$) mit Eins $e = 1$ ist genau dann metrisch, wenn gilt

$$x^2 \in K + Kx \quad \text{für alle } x \in A \tag{1.4}$$

Beweis: Ist A metrisch, so gilt mit der Zerlegung (1.2): $x = \xi + \mathbf{x}$ mit $\xi \in K$, $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x}^2 = -\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \in K$ für jedes $x \in A$. Daher: $x^2 = -\xi^2 + \mathbf{x}^2 + 2\xi x \in K + Kx$.

Gilt umgekehrt (1.4), so bilden wir die Menge

$$J := \{x \in A - K^* / x^2 \in K\} \quad (K^* := K - \{0\}).$$

Man zeigt zunächst, daß J ein Teilvektorraum von A ist: Mit $\alpha \in K$, $x \in J$ folgt sofort $\alpha x \in J$. Sind ferner $x, y \in J$, so kann man wegen $K \cap J = \{0\}$ voraussetzen, daß $1, x, y$ linear unabhängig sind. Addiert man nun die Größen $(x+y)^2$ und $(x-y)^2$ und berücksichtigt, daß wegen (1.4) es zu jedem $z \in A$ Zahlen $\alpha(z)$, $\beta(z) \in K$ mit

$$z^2 = \alpha(z) + \beta(z)z \tag{1.5}$$

gibt, so folgt

$$\beta(x+y) = \beta(x-y) = 0 \quad \text{und damit } x+y \in J.$$

J ist Teilraum. Nun wird $A = K \oplus J$ behauptet: Es gilt $K \cap J = \{0\}$. Sei ferner $x \in A - K$ beliebig. Mit (1.5) bilde man $y := \beta(x) - 2x$; dann folgt $y^2 = \beta^2(x) + 4\alpha(x)$, also $y \in J$, und damit $x = \frac{1}{2}(\beta(x) - y) \in K + J$. A ist schließlich metrisch, denn in der Zerlegung $A = K \oplus J$ bilde man zu jedem $x = \xi + \mathbf{x}$ ($\xi \in K$, $\mathbf{x} \in J$) den Vektor $\bar{x} := \xi - \mathbf{x}$; dann ist $x \to \bar{x}$ der gesuchte Antiautomorphismus φ mit $\mathrm{Fix}\varphi = K$.

2. Zur differentialgeometrischen Kennzeichnung der metrischen $\mathbb{R}$-Algebren nehmen wir eine zunächst beliebige *Liegruppe* [2]) G der Dimension $n+1$ ($n > 0$) über $\mathbb{R}$ und wiederholen zur Festsetzung der Bezeichnungen einige bekannte Dinge aus der Differentialgeometrie [3]).

$T_a(G)$ bezeichne den Tangentialraum von G am Punkt $a \in G$. Einen Tangentenvektor $X_a \in T_a(M)$ an eine Kurve $\gamma: t \in I \to \gamma(t) \in G$ im Punkt $a = \gamma(t_a)$ (I ein Intervall von R) fassen wir auf als den Differentialoperator $X_a = (d/dt)_{t_a}$ mit der Wirkung $X_a f := (df(\gamma(t))/dt)_{t_a}$ auf jede differenzierbare [4]) Funktion $f: G \to R$. Ein Vektor*feld* X ist dann eine Vorschrift $X: a \in G \to X_a \in T_a(G)$, die jedem Punkt a einen Tangentenvektor X_a im entsprechenden Tangentialraum $T_a(G)$ zuordnet. Die Komponenten von X in lokalen Koordinaten seien analytische Funktionen. Wir unterscheiden Xf und fX für ein Vektorfeld X und eine Funktion $f: G \to R$: $Xf: G \to R$ ist die in Rich-

[2]) G ist eine analytische Mannigfaltigkeit, wobei die Multiplikation und das Invertieren in G analytische Operationen sind.

[3]) Vgl. hierzu etwa KOBAYASHI-NOMIZU [7] oder HELGASON [4].

[4]) Alle hier erwähnten Funktionen $G \to R$ seien genügend oft differenzierbar bzw. analytisch.

tung X abgeleitete Funktion zu f, fX ist das durch $(fX)_a := f(a)X_a$ $(a \in G)$ definierte Vektorfeld. $\mathbf{X}(G)$ bezeichne die (über $\mathbb{R}$ unendlich-dimensionale) Liealgebra *aller* (analytischen) Vektorfelder auf G mit dem Lieprodukt $[X,Y] := XY - YX$, wobei XY durch Hintereinanderschalten der Derivationen Y und X definiert ist: $(XY)_a f := X_a(Yf)$ für jede Funktion f: $G \to \mathbb{R}$. Eine (analytische) Transformation Φ: $G \to G$ induziert in natürlicher Weise eine Transformation des Tangentialbündels T(G) (disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume $T_a(G)$, $a \in G$), die wir ebenfalls mit Φ bezeichnen und so definieren: Ist X_a Tangentenvektor an die Kurve $\gamma(t)$ im Punkt $a = \gamma(t_a)$, so sei $Y_{\Phi(a)} = \Phi X_a$ Tangentenvektor an die Kurve $\Phi \circ \gamma(t)$ im Punkt $\Phi(a)$. Φ bewirkt einen Vektorraumisomorphismus $T_a(G) \to T_{\Phi(a)}(G)$. Hiermit ist auch die Wirkung von Φ auf Vektorfelder X definiert, wenn man das Bildvektorfeld ΦX durch $(\Phi X)_{\Phi(a)} = \Phi X_a$ definiert. Im allgemeinen gilt $\Phi X \neq X$. Das Feld X heißt jedoch *invariant bzgl. der Transformation* Φ, wenn $\Phi X = X$ gilt.

Zu jedem $a \in G$ betrachten wir nun die *Linkstranslation*

$$L_a: x \in G \to a \cdot x \in G \quad (a \cdot x \text{ sei das Produkt in } G) \tag{2.1}$$

L_a ist eine analytische Transformation von G, und die Gruppe G wirkt als Gruppe G_L der Linkstranslation einfach transitiv auf G. Ein Vektorfeld heißt X *linksinvariant* (oder kurz *invariant*), wenn

$$L_a X = X \quad \text{für alle } a \in G \tag{2.2}$$

gilt. Die Menge aller invarianten Vektorfelder auf G, bezeichnet mit $\mathbf{g}$, bildet mit dem Lieprodukt [X,Y] eine (n+1)-dimensionale Teil-Liealgebra von $\mathbf{X}(G)$; man nennt $\mathbf{g}$ *die Liealgebra der Liegruppe* G. Eine Integralkurve $\gamma(t)$ durch den Einspunkt $e = \gamma(0)$ eines invarianten Vektorfeldes, $X \in \mathbf{g}$, ist eine Ein-Parametergruppe von G und wird daher mit $\gamma(t) = \exp(tX)$ bezeichnet. Bekanntlich ist der Operator exp eine analytische Diffeomorphie einer Umgebung N_0 von 0 in $\mathbf{g}$ auf eine Umgebung U_e des Einspuktes e in G, wobei $0 \in \mathbf{g}$ in $e \in G$ übergeht; entsprechend bildet $L_a \circ \exp$ nach Wahl irgendeiner *Basis* $X_0, .., X_n$ von $\mathbf{g}$ die Umgebung $N_0 \subset \mathbf{g}$ auf eine Umgebung $U_a = a\, U_e$ vermöge

$$x = x^i X_i \in N_0 \to q = a \cdot \exp(x^i X_i) \in U_a \quad (a \in G \text{ beliebig}) \tag{2.3}$$

ab. Die x^i heißen die *lokalen kanonischen Koordinaten* des Punktes $q \in G$ bzgl. der Basis $X_0 .., X_n$; bezüglich dieser lokalen Koordinaten kann man die Basisvektoren $(X_i)_a$ mit den Operatoren $(\partial/\partial x^i)_a$ gleichsetzen. Die Kurve $a \cdot \exp(tX)$ $(X \in \mathbf{g})$ nennen wir eine *G-Gerade durch den Punkt* $a \in G$ *in Richtung* X. Ist ferner T ein zweidimensionaler Teilvektorraum von $\mathbf{g}$, $T_0 = N_0 \cap T$, so nennen wir $\eta = a \cdot \exp(T_0)$ eine *G-Ebene durch den Punkt* $a \in G$. Ist das invariante Vektorfeld X in T enthalten, so sagen wir, die G-Ebene $\eta = a \cdot \exp(T_0)$ *enthalte die Richtung* X.

Ein auf der Liegruppe G gegebener *linearer Zusammenhang*[5]) ∇ heißt *invariant,* wenn gilt

$$L_a(\nabla_X Y) = \nabla_{L_a X}(L_a Y) \tag{2.4}$$

für jede Linkstranslation $L_a (a \in G)$ und für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathbf{X}(G)$. Sind $y^0, y^1, .., y^n$ lokale Koordinaten in einer Umgebung eines Punktes $p \in G$ und $Y_i = \partial/\partial y^i$ die (lokal definierten) Tangentenvektorfelder an die Koordinatenlinien, so ist $(Y_0)_p, .., (Y_n)_p$ eine Basis des Tangentialraumes $T_p(G)$, und man kann schreiben

$$(\nabla_{Y_i} Y_j)_p = \Gamma^k_{ij}(p)\,(Y_k)_p \tag{2.5}$$

Die Funktionen Γ^k_{ij} heißen die *Komponenten* des linearen Zusammenhangs ∇ (im entsprechenden lokalen Koordinatensystem (y^i)). Ist ∇ *invariant,* so folgt aus $X, Y \in \mathbf{g}$ mit (2.2) und (2.4), daß auch $\nabla_X Y$ in $\mathbf{g}$ ist. Bei gegebenem invariantem Zusammenhang ∇ kann man den Vektorraum $\mathbf{g}$ daher zu einer $\mathbb{R}$-Algebra A_∇ machen durch die Produktdefinition

$$(X,Y) \in \mathbf{g} \times \mathbf{g} \to X \cdot Y := \nabla_X Y. \tag{2.6}$$

Das Produkt ist bilinear über $\mathbb{R}$, da ∇ linear ist.

Ist umgekehrt auf $\mathbf{g}$ eine Algebra A mit einem Produkt $X \cdot Y$ $(X, Y \in \mathbf{g})$ gegeben, so kann man zu A einen eindeutigen linearen invarianten Zusammenhang ∇ finden, so daß $A = A_\nabla$ wird: Sind sämtlich $Y, Z \in \mathbf{X}(G)$ beliebige Vektorfelder, und ist $X_0, .., X_n$ irgendeine Basis von $\mathbf{g}$, so gibt es Funktionen η^i, ξ^i: $G \to \mathbb{R}$ $(i = 0, .., n)$ mit $Y = \eta^i X_i$, $Z = \xi^i X_j$. Wir definieren nun ∇ durch

$$\nabla_Y Z := \eta^i((X_i \xi^j) X_j + \xi^j X_i \cdot X_j). \tag{2.6 a}$$

Dann weist man leicht nach, daß ∇ ein invarianter linearer Zusammenhang auf G mit $A_\nabla = A$ ist.

Es besteht also eine bijektive Zuordnung zwischen der Menge aller invarianten linearen Zusammenhänge auf einer Liegruppe G und der Menge aller $\mathbb{R}$-Algebren, die man auf dem Vektorraum $\mathbf{g}$ einrichten kann.

Eine Kurve $\gamma(t)$ auf einer Mannigfaltigkeit mit linearem Zusammenhang ∇ heißt bekanntlich *Autoparallele* (oder auch Geodätische) des Zusammenhangs, wenn für ihr Tangentenvektorfeld $X = \dot{\gamma}$ gilt

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \text{ für alle t im Definitionsintervall von } \gamma. \tag{2.7}$$

Auf unserer Liegruppe G ist derjenige invariante lineare Zusammenhang ausgezeichnet, für den die G-Geraden die Autoparallelen sind, wir bezeichnen ihn mit D und nennen ihn den *trivialen* Zusammenhang, weil gilt

---

[5]) Eine Vorschrift ∇, die jedem Vektorfeld X einen linearen Operator $\nabla_X : \mathbf{X}(G) \to \mathbf{X}(G)$ zuordnet, heißt *linearer Zusammenhang* auf G, wenn $\nabla_{fX+gY}(Z) = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ und $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ gilt für alle analytischen Funktionen f, g: $G \to \mathbb{R}$ (vgl. etwa HELGASON [4] p. 26).

$$D_X Y = 0 \text{ für alle } X, Y \in \mathbf{g} \tag{2.8}$$

Ist nun auf G ein nichttrivialer linearer invarianter Zusammenhang gegeben, so kann man das Produkt (2.6) der zugehörigen Algebra A_∇ auf die Menge $\mathbf{X}(G)$ aller Vektorfelder ausdehnen vermöge der Definition

$$X, Y \in \mathbf{X}(G) \quad X \cdot Y := \nabla_X Y - D_X Y \in \mathbf{X}(g) \tag{2.9}$$

Das Produkt (2.9) ist in der Tat bilinear, denn mit irgendeiner Basis $X_0, .., X_n$ von $\mathbf{g}$ und geeigneten Funktionen ξ^i, η^i: $G \to \mathbb{R}$ gilt $X = \xi^i X_i$, $Y = \eta^j X_j$; aus (2.6a), (2.8), (2.9) folgt $X \cdot Y = \xi^i \eta^j X_i \cdot X_j$.

Wir setzen von nun an voraus, daß die Liegruppe G *abelsch* ist (ab = ba für a, b $\in$ G), dann gilt $[X, Y] = 0$ für alle $X, Y \in \mathbf{g}$. Hieraus folgt: Ist $X_0, .., X_n$ eine Basis, und sind $x^0, .., x^n$ die zugehörigen kanonischen Koordinaten in einer Umgebung U_a des Punktes $a \in G$ (mit $x_a^0 = .. = x_a^n = 0$), so gilt

$$(X_i)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q \quad (i = 0, .., n) \text{ für alle } q \in U_a, \tag{*}$$

denn für $X, Q \in \mathbf{g}$ (nahe bei 0) und $q = \exp Q$ ist $\exp(tX + Q) = q \cdot \exp(tX)$, weil G abelsch ist, somit ist X_q Tangentenvektor in q an die Kurve $\gamma(t) = \exp(tX + Q)$. Damit ergibt sich

Lemma 1: Ein linearer Zusammenhang ∇ *auf einer abelschen Liegruppe G ist genau dann invariant, wenn seine Komponenten* Γ_{ij}^k *in jedem lokalen kanonischen Koordinatensystem* (x^i) *konstant sind.*

Zum Beweis braucht man nur zu beachten, daß wegen (*) für eine Basis X_i von $\mathbf{g}$ die Strukturkonstanten der Algebra A_∇ mit den Komponenten von ∇ übereinstimmen.

Ist nun $\gamma(t)$ eine in einer Umgebung des Punktes $a \in G$ definierte Autoparallele des invarianten Zusammenhangs mit $\gamma(0) = a$, so erhält man mit (2.3) ihr Bild $x(t)$ in der Umgebung N_0 des Vektorraumes $\mathbf{g} \cdot A_\nabla$ über

$$\exp^{-1}(a^{-1}\gamma(t)) = x(t) = x^i(t) X_i \quad (x^i(0) = 0) \tag{2.10}$$

mit x^i als den kanonischen Koordinaten zur Basis X_i. Wegen der Konstanz der Γ_{ij}^k geht die Differentialgleichung (2.7) von $\gamma(t)$ dann mit (2.9) über in

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \ddot x + \dot x^2 = 0, \tag{2.11}$$

wobei $\dot x$ und $\ddot x$ die erste und zweite Ableitung nach t der Vektorfunktion $x(t)$ sind, und $\dot x^2 = \dot x \cdot \dot x$ das Produkt in A_∇ bedeutet.

Man zeigt z.B. leicht, daß die linear zusammenhängende Mannigfaltigkeit (G, ∇) (∇ invariant) genau dann *lokal-euklidisch* ist (d.h. Torsionstensor T und Krümmungstensor R verschwinden identisch)[6], wenn die zugeordnete Algebra A_∇ *kommutativ* und *assoziativ* ist (vgl. etwa VRANCEANU [11] S. 322). Mit dem Produkt

[6]) Torsions- und Krümmungstensor zum linearen Zusammenhang ∇ sind durch $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, $R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ definiert.

(2.9) berechnet man nämlich für Torsion und Krümmung eines invarianten linearen Zusammenhangs auf der Liegruppe G:

$$T(X,Y) = X \cdot Y - Y \cdot X, \quad R(X,Y)Z = X \cdot (Y \cdot Z) - Y \cdot (X \cdot Z) \tag{2.12}$$

für alle Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathbf{X}(G)$.

3. Wir wollen jetzt die metrischen R-Algebren differential-geometrisch kennzeichnen und bemerken zunächst: Besitzt die Algebra A_∇ eine Eins E, so ist $E \in \mathbf{g}$ ein durch den invarianten linearen Zusammenhang ∇ ausgezeichnetes invariantes Vektorfeld der Liergruppe G. Es gilt:

Satz 2: Besitzt A_∇ eine Eins E, so ist jede Autoparallele von ∇ durch irgendeinen Punkt $a \in G$ *in Richtung E Stück einer G-Gerade.*

Beweis: Mit einem allgemeinen Parameter t hat das Bild in $\mathbf{g}$ eines G-Geradenstückes durch $a \in G$ in Richtung E wegen (2.10) die Gleichung $x(t) = \alpha(t)E$ $(\alpha(0) = 0, \dot{\alpha} \neq 0)$. Wegen $E^2 = E$ löst die Funktion $\alpha(t) = \ln(ct+1)$ $(c = \dot{\alpha}(0))$ die Differentialgleichung (2.11).

Betrachten wir insbesondere invariante Zusammenhänge zu metrischen Algebren, so gilt

Satz 3: Ist (G,∇) *eine linear zusammenhängende abelsche Liegruppe mit invariantem Zusammenhang ∇, dessen zugehörige Algebra A_∇ eine Eins E besitzt, so ist A_∇ genau dann metrisch, wenn jede die Richtung E enthaltende G-Ebene geodätisch ist.*

Eine G-Ebene η heiße geodätisch, wenn durch jeden Punkt q_0 von η in jeder Richtung von η eine ganz in η liegende Autoparallele existiert.

Beweis von Satz 3: (i) Die E enthaltende Ebene η durch den Punkt $a \in G$ sei geodätisch. Mit einem geeigneten zu E linear unabhängigen invarianten Vektorfeld $Z \in \mathbf{g} = A_\nabla$ gilt

$$\exp^{-1}(a^{-1} \cdot \eta) \subset \mathbb{R}E + \mathbb{R}Z.$$

Für jede Autoparallele $\gamma(t)$ in η durch einen Punkt $q_0 = \gamma(0) \in \eta$ kann man ansetzen

$$\exp^{-1}(a^{-1} \cdot \gamma(t)) = x(t) = \alpha(t)E + \beta(t)Z + x_0$$

mit $q_0 = a \exp(x_0)$ und geeigneten Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ $(\alpha(0) = \beta(0) = 0)$. Wegen Satz 2 kann man voraussetzen, daß die Anfangsrichtung von $\gamma(t)$ (bei $t = 0$) nicht E ist, also $\dot{\beta}(0) \neq 0$. Aus der Differentialgleichung (2.11) für x(t) folgt

$$(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)E + (\ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta})Z + \dot{\beta}^2 Z^2 = 0.$$

Wegen $\dot{\beta}(0) \neq 0$ gilt daher $Z^2 \in \mathbb{R}E + \mathbb{R}Z$. Dies gilt für alle $Z \in A_\nabla$, da jede (E enthaltende) G-Ebene nach Voraussetzung geodätisch ist. daher ist A_∇ metrisch nach Satz 1.

(ii) Umgekehrt sei nun A_∇ metrisch: $A_\nabla = \mathbb{R}E \ominus V$ (vgl. 1.2). Wir zeigen, daß es zu jedem $Z \in V$ $(Z \neq 0)$ und zu jeder Anfangsrichtung $\dot{\alpha}(0)E + \dot{\beta}(0)Z$ analytische Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ (t nahe bei 0, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$) gibt, so daß der Ansatz

$$x(t) = \alpha(t)E + \beta(t)Z + x_0 \tag{3.1}$$

mit $x_0 \in \mathbb{R}E + \mathbb{R}Z$ (nahe bei 0) eine G-ebene Autoparallele $\gamma(t) = a \cdot \exp(x(t))$ durch den Punkt $q_0 = \gamma(0) = a \cdot \exp(x_0)$ liefert. Differentiation von (2.13) und Einsetzen in (2.11) ergibt für die Funktionen α und β die Differentialgleichungen

$$\text{(I)} \quad \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 = \mu\dot{\beta}^2, \qquad \text{(II)} \quad \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0 \tag{3.2}$$

mit der reellen Konstanten $\mu = -Z^2 = \langle Z, Z \rangle$ ($\langle , \rangle$ ist die symmetrische Bilinearform der metrischen Algebra A_∇, bei der vorübergehend $E = 1$ gesetzt ist). Aus (II) folgt zunächst

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\beta}(0)\, e^{2\alpha(t)} \tag{3.3}$$

Nochmaliges Differenzieren von (I) und Einsetzen von (3.3) liefert mit der Substitution

$$\alpha(t) = \int_0^t \sigma(\tau)d\tau \tag{3.4}$$

die Differentialgleichung

$$\ddot{\sigma} + 6\sigma\dot{\sigma} + 4\sigma^3 = 0 \tag{3.5}$$

Ein Potenzreihenansatz

$$\sigma(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots \; (a_k \in \mathbb{R})$$

liefert a_0, a_1 als freie Konstanten, und die a_k $(k = 2, 3, \ldots)$ ergeben sich rekursiv als Funktionen von $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, und es gilt für festes k: $\lim a_k = 0$, falls a_0 und a_1 gegen 0 gehen. Damit erreicht man für genügend kleine Werte a_0, a_1 einen hinreichend großen Konvergenzradius der Potenzreihe. Als Anfangsbedingungen ergeben sich $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = a_0$, $\dot{\beta}(0)$ ist von a_0, a_1 unabhängig. Somit bekommt man gewünschte Funktionen $\alpha(t), \beta(t)$.

Wir fragen noch, falls A_∇ metrisch ist, welche Autoparallelen des invarianten Zusammenhangs ∇ (außer denen von Satz 2) Stücke von G-Geraden sind.

Hierzu betrachten wir den quadratischen Kegel

$$\mathbf{S} = \{X \in A_\nabla \,/\, \langle X, X \rangle = 0\} \tag{3.6}$$

im metrischen Vektorraum A_∇, wobei $\langle , \rangle$ wieder die Metrik (1.1) ist.

Satz 4: Ist die Algebra A_∇ zum invarianten linearen Zusammenhang ∇ der abelschen Liegruppe G metrisch, so gilt: Ein Stück einer G-Gerade ist genau dann Autoparallele des Zusammenhangs ∇, wenn ihre Richtung X entweder $= E$ oder aus dem quadratischen Kegel $\mathbf{S}$ ist.

Beweis: Das Bild in $\mathbf{g}$ einer G-Gerade kann man wenigstens ein Stück weit in einem allgemeinen Parameter t mit $x(t) = \alpha(t)X$ $(\alpha(0) = 0, \dot{\alpha}(0) = 1)$ ansetzen. Wegen Satz 2 können wir für die Richtung X in der Zerlegung $A_\nabla = \mathbb{R}\,E \oplus V$ voraussetzen: $X = \xi + \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \in V - \{0\}$, wobei noch vorübergehend $E = 1$ gesetzt wird. Wegen $\mathbf{x}^2 = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ folgt dann

$$X^2 = (\xi^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle) + 2\xi\mathbf{x}.$$

Soll die G-Gerade ein Stück weit eine Autoparallele sein, so folgt aus (2.11): $\ddot{\alpha}(0)X+X^2=0$, d.h. $\ddot{\alpha}(0)\xi+\alpha(0)\mathbf{x}+(\xi^2-\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle)+2\xi\mathbf{x}=0$. Komponentenvergleich ergibt wegen $\mathbf{x}\neq 0$: $\ddot{\alpha}(0)\xi+\xi^2-\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=0$, $\ddot{\alpha}(0)+2\xi=0$. Elimination von $\ddot{\alpha}(0)$ ergibt $0=\xi^2+\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=\langle X,X\rangle$, also $X\in\mathbf{S}$.

Ist umgekehrt die Richtung $X=\xi E+\mathbf{x}\in\mathbf{S}-\{0\}$ gegeben, so löst die Funktion $\alpha(t)=t-\xi t^2$ im Ansatz $x(t)=\alpha(t)X$ die Differentialgleichung (2.11), d.h. das betreffende Stück der G-Gerade ist eine Autoparallele.

4. Auf der Mannigfaltigkeit G mit invariantem Zusammenhang ∇, dessen zugeordnete Algebra A_∇ metrisch sei, suchen wir nun, im Fall, daß A_∇ kommutativ ist, nach Riemannschen oder pseudo-Riemannschen Metriken, die mit dem Zusammenhang verträglich sind; dabei muß man die gesuchte (pseudo)-Riemannsche Metrik g zunächst wohl unterscheiden von der „Metrik" (1.1) der Algebra A_∇. Zuvor eine allgemeine Bemerkung: Bekanntlich[7]) kann man die (bisher hier nur auf Vektorfelder angewandte) Derivation ∇_Z ($Z\in\mathbf{X}(G)$) eines linearen Zusammenhangs ∇ in natürlicher Weise auch auf beliebige Tensorfelder ausdehnen. Ist insbesondere g ein zweifach-kovariantes Tensorfeld, aufgefaßt als Bilinearform, welche jedem Paar X,Y aus $\mathbf{X}(G)$ eine reellwertige Funktion

$$g(X,Y)\colon p\in G\to g_p(X_p,Y_p)\in\mathbb{R}$$

zuordnet, wobei $g_p\colon T_p(G)\to\mathbb{R}$ jeweils eine $\mathbb{R}$-Bilinearform auf dem entsprechenden Tangentialraum ist, so ist $\nabla_Z g$ ein Tensorfeld vom gleichen Typ wie g und kann durch

$$(\nabla_Z g)(X,Y):=Z(g(X,Y))-g(\nabla_Z X,Y)-g(X,\nabla_Z Y) \tag{4.1}$$

erklärt werden.

Ein solches Tensorfeld g nennt man eine *pseudo-Riemannsche* Metrik auf der Mannigfaltigkeit G, wenn g *symmetrisch* ist, $g(X,Y)=g(Y,X)$, und wenn für jeden Punkt $p\in G$ die Bilinearform g_p auf $T_p(G)$ *nicht ausgeartet* ist. g heißt insbesondere *Riemannsche Metrik*, wenn g_p *positiv definit* ist für jedes $p\in G$. Jede *(pseudo)-Riemannsche* Metrik g induziert bekanntlich genau einen linearen Zusammenhang, so daß bei Parallelverschiebung je zweier Vektoren X_p,Y_p in Punkt p entlang einer Kurve von p nach q für die verschobenen Vektoren X'_q,Y'_q gilt

$$g_q(X'_q,Y'_q)=g_p(X_p,Y_p).$$

Der von der (Pseudo)-Riemannschen Metrik g induzierte Zusammenhang genügt folgenden Bedingungen:

(A) ∇ ist *symmetrisch:* $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$
(D.h. der Torsionstensor $T(X,Y)$ verschwindet identisch)
(B) In jeder Richtung X verschwindet die kovariante Ableitung von g: $\nabla_X g=0$ („Lemma von RICCI")

Ist umgekehrt der symmetrische lineare Zusammenhang ∇ gegeben, und findet man

---

[7]) Vgl. etwa HELGASON [4].

eine (pseudo)-Riemannsche Metrik g, die der Bedingung (B) genügt, so nennen wir g *mit* ∇ *verträglich.* ∇ ist dann gerade der von g induzierte Zusammenhang.

Gegeben sei nun eine linear zusammenhängende abelsche Liegruppe (G,∇) der Dimension $n+1$, ∇ invariant, und die zugeordnete $(n+1)$-dimensionale Algebra A_∇ sei *metrisch:* $A_\nabla = \mathbb{R}\, E \ominus V$ (E die Eins von A_∇, $\dim V = n$, vgl. (1.2)). Zum Auffinden einer (pseudo)-Riemannschen mit ∇ verträglichen Metrik setzen wir die Bedingung (A) voraus. Aus der ersten Gleichung (2.12) folgt dann, daß (G,∇) torsionsfrei, A_∇ also kommutativ ist; A_∇ sei also eine *metrische Jordanalgebra.* Zum Lösen der Bedingung (B) nehmen wir eine invariante Basis $X_0 = E, X_1, .., X_n$ von $\mathbf{g} = A_\nabla$ und setzen in den zugehörigen *lokalen kanonischen Koordinaten* $x^0, x^1, .., x^n$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} := g(X_\alpha, X_\beta) \quad (\alpha,\beta = 0,..,n) \tag{4.2}$$

für die Komponenten des gesuchten Metriktensorfeldes g. (B) ist dann gleichwertig mit dem System

$$X_\alpha(g(X_\beta, X_\gamma)) = g(X_\alpha \cdot X_\beta, X_\gamma) + g(X_\beta, X_\alpha \cdot X_\gamma) \tag{4.3}$$

partieller Differentialgleichungen, welches der Formel (4.1) entspricht; $X \cdot Y$ ist das Produkt in A_∇, und $X_\alpha = \partial/_{\partial x}\alpha$. Mit den konstanten Komponenten $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ des invarianten Zusammenhangs ∇ und (4.2) geht (4.3) über in

$$\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\, g_{\sigma\gamma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\sigma} \quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma = 0,1,..,n) \tag{4.4}$$

Für *festen* Index α ist (4.4) ein System von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Reiht man die Größen $g_{\beta\gamma}$ zu einer Spalte von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Elementen auf, so sind bei entsprechender Umnumerierung gewisse Linearkombinationen der Konstanten $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ die Elemente der Systemmatrix C_α von (4.4) Der einfachste Ansatz für eine Lösung g von (4.4) lautet daher

$$g_{\beta\gamma} = c_{\beta\gamma}\, e^{\mu_0 x^0}\, e^{\mu_1 x^1} \ldots e^{\mu_n x^n} \quad (c_{\beta\gamma} \text{ Konstanten}), \tag{4.5}$$

wobei μ_α jeweils ein Eigenwert zur betreffenden Systemmatrix C_α $(\alpha = 0,1,..,n)$ ist. Sind die Matrizen C_α für jedes $\alpha \in \{0,..,n\}$ diagonalähnlich, so bekommt man durch Liniarkombinationen über alle Eigenwerte von C_α aus den Teillösungen der Form (4.5) jede mögliche Metrik g, welche mit ∇ verträglich ist. Sind nicht alle C_α $(\alpha = 0,..,n)$ diagonalähnlich, so können die Komponenten von g noch Terme besitzen, die Potenzen der Koordinaten x^α enthalten. Ferner muß man im allgemeinen erwarten, daß ein Lösungstensor g ausgeartet ist, also keine (pseudo)-Riemannsche Metrik auf der Mannigfaltigkeit darstellt.

Wir beschränken uns daher auf einen Sonderfall:

Satz 5: (G,∇) sei eine linear zusammenhängende abelsche Liegruppe mit invariantem symmetrischem Zusammenhang ∇, dessen zugeordnete Algebra A eine metrische Jordanalgebra mit positiv definierter Metrik $\langle,\rangle$ ist. Der Ansatz (4.5) liefert für eine Orthonormalbasis $X_0 = E, X_1, .., X_n$ von A (orthonormal *bzgl. der Bilinearform $\langle , \rangle$) eine Schar konform-euklidischer (Riemannscher) Metriken g mit den Komponenten*

$$g_{\alpha\beta} = c\, e^{2x^0} \delta_{\alpha\beta} \quad (c > 0, \textit{ konstant, beliebig}),$$

welche mit dem Zusammenhang ∇ verträglich sind.

Beweis: Partielle Ableitung des Ansatzes (4.5) nach x^α und Einsetzen in (4.4) ergibt das lineare System

$$\mu_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\, g_{\sigma\gamma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\sigma} \quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma = 0,..,n) \tag{4.6}$$

Ist nun A_∇ metrische Jordanalgebra, $\langle , \rangle$ positiv definit und $X_0 = E, X_1,..,X_n$ Orthonormalbasis bzgl. $\langle , \rangle$, so gilt, wenn wir die Indizes i, j, k, s von 1 bis n laufen lassen, die $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ von 0 bis n:

$$X_0 \cdot X_0 = \Gamma^\sigma_{00}\, X_\sigma = X_0, X_0 \cdot X_i = X_i \cdot X_0 = \Gamma^\sigma_{0i}\, X_\sigma = X_i, X_i \cdot X_j =$$
$$= \Gamma^\sigma_{ij} X_\sigma = -\langle X_i, X_j \rangle E + -\delta_{ij} X_0.$$

Daraus folgt

$$\Gamma^0_{00} = 1, \Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = \Gamma^k_{ij} = 0,\ \Gamma^s_{0i} = \Gamma^s_{i0} = \delta^s_i, \Gamma^0_{ij} = -\delta_{ij} \tag{4.7}$$

Aus (4.6) ergeben sich mit (4.7) folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)}\ (\mu_0 - 2) g_{00} = 0, & \text{(II)}\ \mu_0 g_{0k} = 0, & \text{(III)}\ (\mu_0 - 2) g_{jk} = 0, \\ \text{(IV)}\ \mu_i g_{00} - 2 g_{0i} = 0, & \text{(V)}\ \mu_i g_{0k} - g_{ik} + \delta_{ik} g_{00} = 0, & \\ \text{(VI)}\ \mu_i g_{jk} + \delta_{ij} g_{0k} + \delta_{ik} g_{0j} = 0. & & \end{array} \tag{4.8}$$

Wir unterscheiden zwei Hauptfälle: (A) $\mu_0 = 2$; (B) $\mu_0 \neq 2$.

Fall (A): Unterfälle (A1) $g_{00} \neq 0$; (A2) $g_{00} = 0$.

(A1): Aus (II) und (IV) folgt $g_{0k} = 0$, $\mu_i = 0$; aus (V) folgt $g_{ik} = g_{00}\delta_{ik}$. Setzen wir $c_{00} := c$ (> 0 beliebig), so erhalten wir die in Satz 5 angegebene konform-euklidische Metrik.

(A2): Aus (IV) und (V) folgt $g_{0i} = g_{ik} = 0$, also eine totale Ausartung.

Fall (B): In allen Fällen ergibt sich wieder die totale Ausartung $g_{\alpha\beta} = 0$.

Anmerkung: Erweitert man die Bilinearform $\langle , \rangle$ von $A_\nabla = \mathbf{g}$ in natürlicher Weise auf ganz $\mathbf{X}(G)$, so hängt sie mit der in Satz 5 gefundenen Riemannschen Metrik g in einer Umgebung eines Punktes $a \in G$ über

$$g(X,Y) = e^{2\lambda} \langle X, Y \rangle$$

zusammen, wobei λ eine Funktion ist, für die man $\lambda(a) = c$ setzen kann. Die in Satz 5 gefundene Riemannsche Metrik g ist (bis auf den Ähnlichkeitsfaktor $e^{2\lambda}$) übrigens die *einzige* mit dem invarianten Zusammenhang ∇ (A_∇ metr. Jordanalgebra, $\langle , \rangle$ pos. definit) verträgliche nicht-ausgeartete Riemannmetrik im Fall $n > 1$, denn nach einem allgemeinen Satz von KOWALSKI [8] wird g (bis auf den Ähnlichkeitsfaktor $e^{2\lambda}$) eindeutig durch den zu ∇ gehörigen Krümmungstensor R (vgl. (2.12)) bestimmt.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Kinematik und Quaternionen. Berlin, VEB Deutscher Vlg. d. Wiss. 1960.

[2] BLASCHKE, W. / MÜLLER, H.R.: Ebene Kinematik. München, Oldenbourg, 1956.

[3] BRÖCKER, L.: Kinematische Räume. Geometriae Dedicata **1** (1973), 241–278.

[4] HELGASON, S.: Differential Geometry and Symmetric Spaces. New York/London, Academie Press, 1962.

[5] JACOBSON, N.: Structure and Representations of Jordan Algebras. Vol. 34 Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Providence, R.I., 1968.

[6] KARZEL, H.: Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **41** (1974) 158–171.

[7] KOBAYASHI, S. / NOMIZU, K.: Foundations of Differential Geometry I. New York/ London, Intersc. Publ. 1963.

[8] KOWALSKI, O.: On Regular Curvature Structures. Mathemat. Zeitschr. **125** (1972), 129 bis 138.

[9] LÜBBERT, C.: Die kinematischen Geradenabbildungen (Habilitationsschrift). Preprint 278, Darmstadt 1976.

[10] STRUBECKER, K.: Über Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. Mathemat. Zeitschr. **52** (1950), 401–435.

[11] VRANCEANU, G.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Berlin, Akademie-Verlag 1961.